- L'optique est la science dédiée à tout ce qui se rapporte à la lumière depuis son émission jusqu'à sa réception. On s'intéresse plus particulièrement à son passage et son interaction avec les différents milieux qui s'interposent sur son chemin
- L'optique géométrique s'intéresse à la trajectoire des rayons lumineux, émis par un objet ou plusieurs, dans les différents milieux optiques qui s'interposent sur leur chemin avant d'atteindre le récepteur pour former l'image.
- Un système optique se compose en général de trois parties.



- **Emetteur (source de lumière)** : ponctuelle ou étendue - monochromatique ou polychromatique - cohérente ou incohérente
- **Milieu optique** : Il peut être constitué d'un seul ou de plusieurs milieux optiques de formes géométriques diversifiés.
- **Récepteur** : Écran opaque ou capteur analogique ou numérique, en général les capteurs sont sensibles à l'intensité de la lumière.

- Equation d'ondes : $\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0$
- Une onde est une perturbation dans l'espace qui se propage dans le temps avec la vitesse $v$. Elle prend la forme générale $f(x \pm vt)$.
- $\Phi_e(x,t) = \mathcal{R}\{\phi_e(x,\omega)\exp(2\omega t)\}$
- → L'équation devient : $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K^2\right)\phi_e(x,\omega) = 0 \quad ; K = \frac{\omega}{v}$
- Onde plane monochromatique : $\phi_e(x,t) = \phi_e(\omega,K)\exp\left[2(\omega t - Kx)\right]\exp(2\phi_0)$

$\phi_e(\omega,K)$ : l'amplitude de l'onde plane. $\omega t - Kx$ : retard de phase à la source. $K$ : nombre d'onde. $\phi_0$ : fréquence angulaire de l'onde

- Onde plane monochromatique (solution générale) :

$$\phi(x,t) = \iint \phi(\omega,K)\exp\left[2(Kx - \omega t)\right] d^3K\, d\omega$$

- Lumière visible : longueur d'onde comprise entre 320 nm et 780 nm.
- fonction décrivant la propagation d'une OPM : $\phi_e(x,t) = A\varphi(x,t)$, $\varphi(x,t) = \omega t - Kx$
- taux de variation de cette phase dans le temps définit la fréquence temporelle de l'onde :

$$\omega = \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x\right|$$

- taux de variation de cette phase dans l'espace définit la fréquence spatiale de l'onde.

$$K_i = \left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_t\right| \qquad i = 1,2,3$$

- vitesse de phase : $V_\varphi = \frac{\omega}{K}$ $u \Leftarrow d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x dt + \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_t dx_i = 0$

Scanné avec CamScanner

- l'indice optique d'un milieu : $n = \frac{c}{v_\varphi}$
- Milieu homogène isotrope : L'indice optique est constant en tout point du milieu et indépendant de la direction de propagation de la lumière
- Milieu linéaire : L'indice optique est indépendant de l'intensité de l'onde optique.
- Milieu sans perte : L'indice optique du milieu est purement réel.
- Milieu non dispersif : L'indice optique est indépendant de la fréquence de l'onde optique
- Le chemin optique est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant le temps que mettait la lumière pour parcourir la même distance dans un milieu d'indice optique n :

$$L_{AB} = c \times t_{milieu} = c \times \frac{AB}{v_\varphi} \qquad [AB] = nAB$$

- Principe du moindre temps : Dans un milieu optique quelconque, pour aller d'un point A à un point B la lumière choisira la trajectoire pour laquelle le chemin optique est stationnaire $dL = 0$.
- Principe de retour inverse : C'est une conséquence directe du principe de Fermat, il stipule que si la lumière prend la trajectoire (+1) pour aller de A à B alors elle empruntera la même trajectoire (+1) pour revenir de B à A.
- équation des rayons : $\vec{\nabla}(n) = \frac{d}{ds}(n\vec{u})$

Loi de réfraction :
- 1ère loi de Snell-Descartes : Le rayon incident et transmis appartient au même plan d'incidence défini par $(\vec{N}, \vec{u})$
- 2ème loi de Snell-Descartes : $(n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}) \wedge \vec{N} = 0 \Rightarrow n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$

Loi pour la réflexion :
- 1ère loi de Snell-Descartes : Le rayon incident et réfléchi appartiennent tous les deux au plan d'incidence $(\vec{N}, \vec{u})$.
- 2ème loi de Snell Descartes : Le rayon réfléchi fait un angle égal en valeur absolue à l'angle d'incidence i : $i' = (\vec{N}, \vec{u'}) = -i = (\vec{N}, \vec{u})$

- Condition d'existence du rayon réfléchi : En général, le rayon réfléchi existe toujours quelque soit le type de l'interface qui sépare deux milieux d'indice optique $n_1$ et $n_2$.
- Condition d'existence du rayon réfracté : on distingue deux cas :
  - Le rayon réfracté existe toujours lorsque la lumière passe d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent $(n_1 < n_2)$
  - Lorsque la lumière passe d'un milieu plus réfringent vers un milieu plus réfringent, le rayon réfracté existera tant que l'angle d'incidence est inférieur à un angle limite $i_\ell$ défini par : $i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

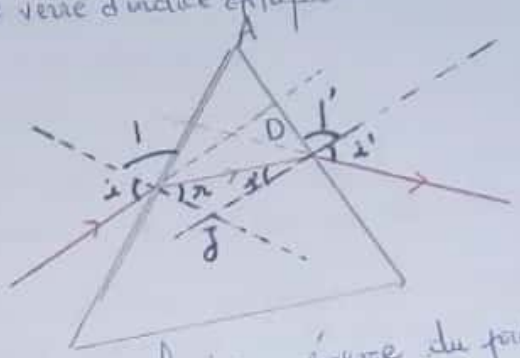
Scanné avec CamScanner

- **réflexion totale** : toute énergie lumineuse sera totalement réfléchie lorsque le rayon lumineux incident sur une interface séparant deux milieux transparents d'indices optiques $n_1$ et $n_2$ tel que $n_1 > n_2$ fait un angle $i > i_l = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. C'est le phénomène de la réflexion totale.

- **fibre optique** : $n_c > n_g$ $\quad ON = \sin\theta_0 = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$

- **prisme** : C'est un dispositif optique de verre d'indice optique $n$.

  - $\sin(i) = n \sin(r)$
  - $\sin(i') = n \sin(r')$
  - $A = r + r'$
  - $D = i + i' - A$




Il existe deux conditions pour qu'un rayon lumineux émerge du prisme

- **condition géométrique** : $A < 2r_l \quad r_l = \arcsin(1/n)$
- **condition optique** : $\sin(i_{max}) = n \sin(A - r_l)$

- système optique : ensemble de milieux optiques d'indices de réfraction différents disposés les uns à la suite des autres et séparés par des interfaces transparentes ou réfléchissantes de formes géométriques différentes.
- Le principe de retour inverse de la lumière permet d'interchanger les rôles d'objet et d'image. mais en général, on oriente un système optique dans le sens de propagation de la lumière
- Lorsque l'image se forme après la sortie du système, elle est dite réelle. par contre lorsqu'elle se forme avant la sortie du système, elle est dite virtuelle.
- L'espace qui se trouve après la sortie du système optique et appelé espace image réel et celui qui s'étend de $-\infty$ jusqu'à l'interface de sortie s'appelle espace image virtuel. Par analogie, on définit l'espace objet réel l'espace qui s'étend de $-\infty$ jusqu'à l'interface d'entrée du système
Ce qui reste est l'espace objet virtuel.
- Un système optique S est dit **rigoureusement stigmatique** pour un couple de points $(A, A')$. Si pour tout rayon émis par le point objet A et après avoir traversé le système S passe par A' une fois sorti de ce dernier. Dans ce cas, on dit que les points $(A, A')$ sont conjugués par le système optique S.
- Condition du stigmatisme rigoureux : pour que S soit rigoureusement stigmatique pour un couple de points $(A, A')$ est $L_{AA'} = [AA'] = nAI + [II'] + n'I'A' = cte \ \forall (I, I')$

Le stigmatisme rigoureux est presque impossible à obtenir sauf pour des cas très spéciaux.

Scanné avec CamScanner

- L'aplanétisme est la propriété de conservation du stigmatisme rigoureux pour ... couple $(B,B')$ appartenant au plan de front. Un système optique est dit aplanétique pour un couple $(B,B')$ s'il satisfait deux conditions

  - Il est stigmatique pour le couple de point $(A,A')$ avec $A$ la projection orthogonale de $B$ sur l'axe optique du système $(S)$
  - Il est stigmatique pour tout point $B$ appartenant au plan de front qui passe par $A$ et infiniment voisin de ce dernier

- relation des sinus d'Abbe : $n\,\overline{AB}\,\sin u = n'\,\overline{A'B'}\,\sin u'$
- relation d'Herschell : $n\,\overline{AA_1}\,\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) = n'\,\overline{A'A'_1}\,\sin^2\left(\frac{u'}{2}\right)$ avec $[M'] - [A_1A'_1]$ - cte
- Un instrument optique est approximativement stigmatique si l'image d'un point objet $A$ est une tache dont le diamètre est inférieur à la résolution spatiale numérale du récepteur optique.
- L'approximation de Gauss fournit les conditions nécessaires pour concevoir un système optique approximativement stigmatique pour un couple de point $(A,A')$. Elle est basée sur deux conditions principales
  - Les rayons lumineux issus des points objets sont paraxiaux.
  - Les points objets doivent être très voisins de l'axe optique du système.
- Dans le cas de l'approximation de Gauss, les angles $u$ et $u'$ sont très petits, la relation d'Abbe devient :

  - **relation de Lagrange - Helmholtz** : $n\,\overline{AB}\,u \approx n'\,\overline{A'B'}\,u'$.
  - **grandissement transversal** : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{nu}{n'u'}$ (valeur algébrique).
  - **grandissement angulaire** : ou le rapport de convergence et $G_\alpha = G_u = \frac{u'}{u}$
  - **grandissement axial** : soit $AA_1$ un déplacement axial du point objet et soit $A'A'_1$ celui de son image paraxiale. Le grandissement axial d'un système optique centré est $G_L = \lim_{A_1 \to A} \frac{\overline{A'A'_1}}{\overline{AA_1}} = \frac{dx'}{dx}$

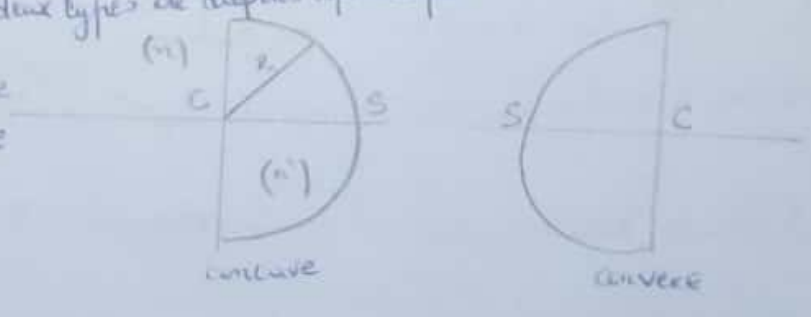
- La relation d'Herschell dans les conditions de Gauss devient $n\,\overline{AA_1}\left(\frac{u}{2}\right)^2 \approx n'\,\overline{A'A'_1}\left(\frac{u'}{2}\right)^2$
- On peut définir le grandissement axial est égal au rapport lorsque $A_1$ est très proche de $A$

$$G_L = \frac{\overline{A'A'_1}}{\overline{AA_1}}$$

Il s'en suit que $G_L = \frac{n}{n'}\left(\frac{u}{u'}\right)^2 \Rightarrow G_L = \left(\frac{n}{n'}\frac{u}{u'}\right)\frac{u}{u'} \Rightarrow G_L = \frac{G_t}{G_u}$

## Dioptres sphériques :

- Un dioptre sphérique est un ensemble hétérogène de deux milieux transparents, homogènes, isotropes d'indices optiques différents séparés par une interface de forme sphérique de centre $C$, de sommet $S$ et de rayon $R$. Il existent deux types de dioptres sphériques.
  - si $\overline{SC} < 0$ alors le dioptre est concave
  - si $\overline{SC} > 0$ alors le dioptre est convexe

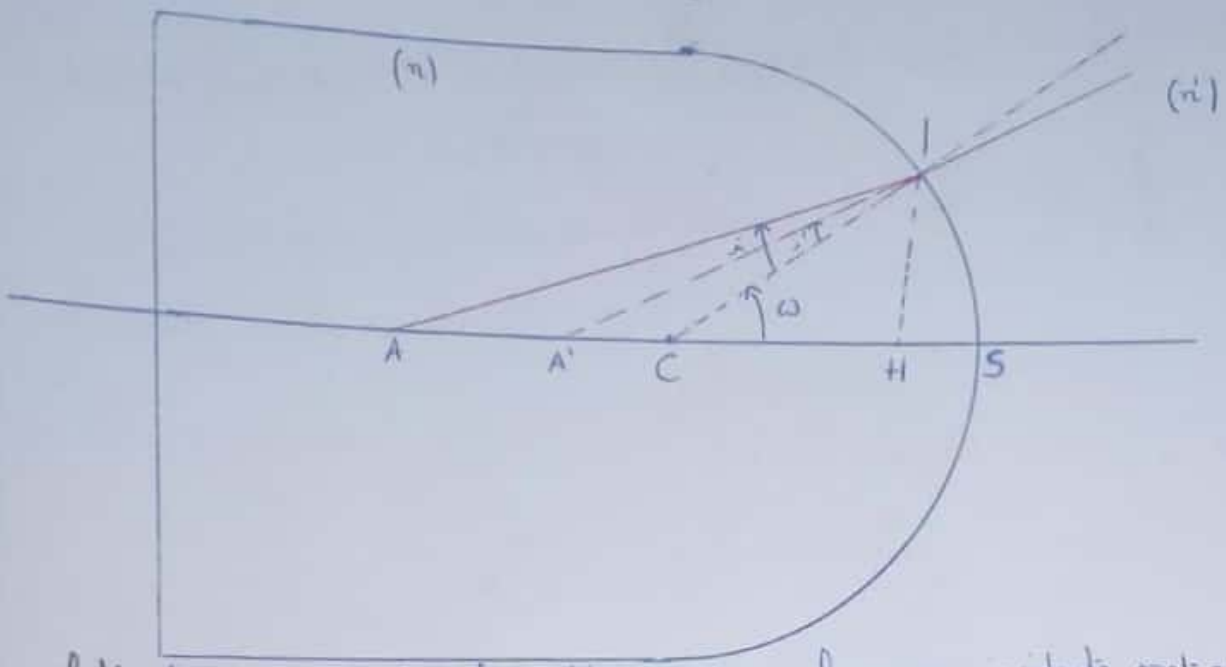



Scanné avec CamScanner

- L'invariant fondamental du dioptre sphérique ou ce qu'on appelle aussi l'invariant de Möbius est donné par la relation :

$$n\frac{\overline{CA}}{\overline{IA}} = n'\frac{\overline{CA'}}{\overline{IA'}}$$

(5)




- relation de conjugaison : dans les conditions de Gauss, les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à l'axe optique du dioptre.

$$\cos u = \frac{\overline{HA}}{\overline{IA}} \simeq 1 \Rightarrow \overline{HA} \simeq \overline{IA}$$

$$\cos u' = \frac{\overline{HA'}}{\overline{IA'}} \simeq 1 \Rightarrow \overline{HA'} \simeq \overline{IA'}$$

L'invariant de Möbius devient : $n\frac{\overline{CA}}{\overline{SA}} = n'\frac{\overline{CA'}}{\overline{SA'}}$

- relation de conjugaison avec origine au sommet S : $\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$
- relation de conjugaison avec origine au centre : $\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$

- Le foyer est un point spécial de l'axe optique du dioptre sphérique. Il y en a deux types :
  - foyer image principal F' : C'est un point unique de l'espace image, réel ou virtuel, situé sur l'axe optique du système. Il est le lieu de convergence des rayons émis par un point objet localisé à l'∞.
  - foyer objet principal F : C'est un point unique de l'espace objet, réel ou virtuel, situé sur l'axe optique du système pour lequel son image est rejetée à l'∞.

$$\overline{SF} = \frac{-n}{n'-n}\overline{SC} \quad \text{et} \quad \overline{SF'} = \frac{n'}{n'-n}\overline{SC}$$

Vergence : une grandeur algébrique qui caractérise la nature convergente ou divergente d'un système optique. Dans le cas du dioptre sphérique on a : $V = \frac{n'-n}{\overline{SC}}$ (δ)

- $n'-n > 0$ : C est dans le milieu d'émergence.
- $n'-n < 0$ : C est dans le milieu d'incidence.

- V
  - $V > 0$ : La position du centre est imposé par le signe de $n'-n$
  - $V < 0$ : le dioptre est divergent et son centre C est localisé du côté du milieu le moins réfringent

Scanné avec CamScanner

**distance focale f'** : une grandeur caractéristique du dioptre sphérique, elle est la distance qui sépare le foyer image principal F' au sommet du dioptre S.

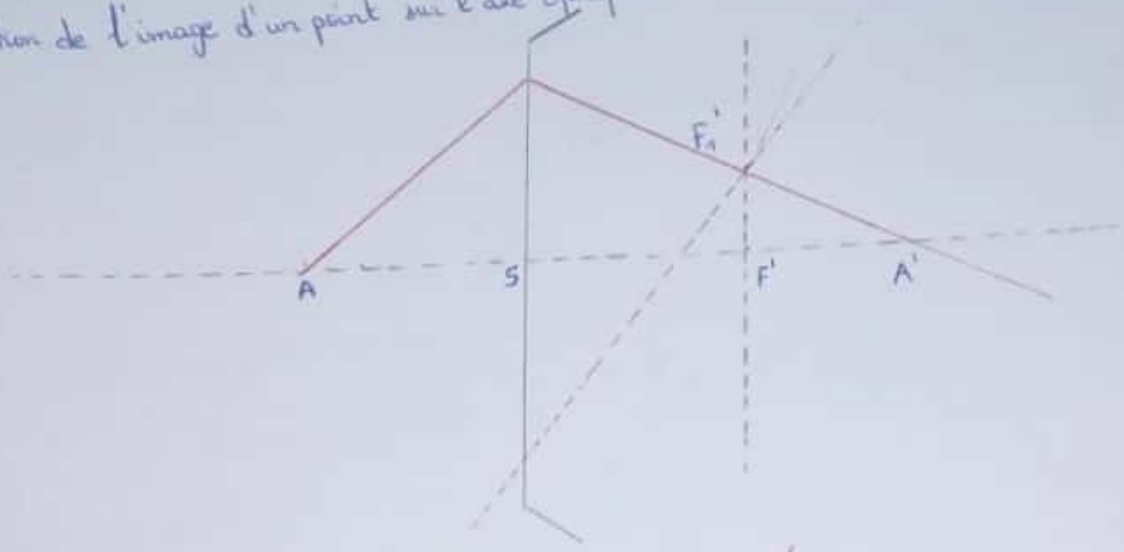
On a : $f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{V}$

- **distance focale objet f** : la distance qui sépare le sommet au foyer objet principal

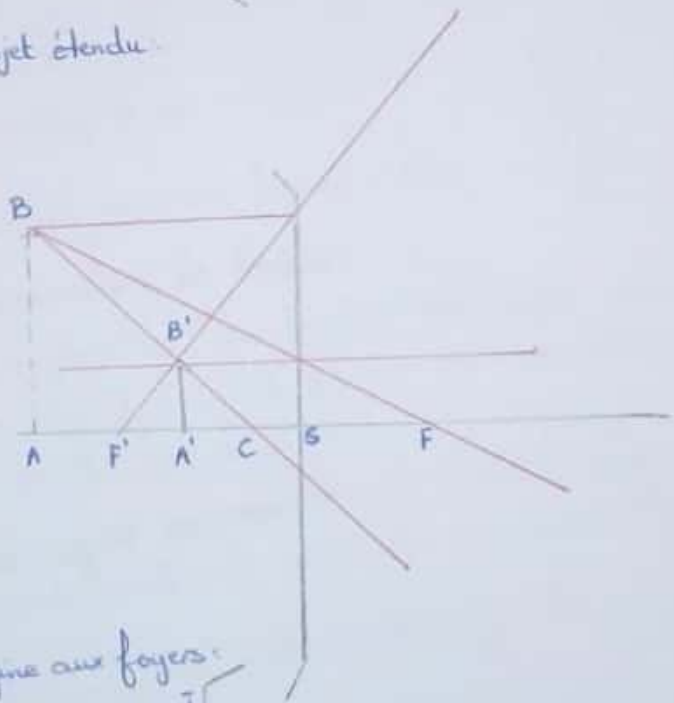
On a : $f = \overline{SF} = \frac{-n}{V}$

- Les deux grandeurs sont reliées par les relations : $f + f' = \overline{SC}$ et $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$

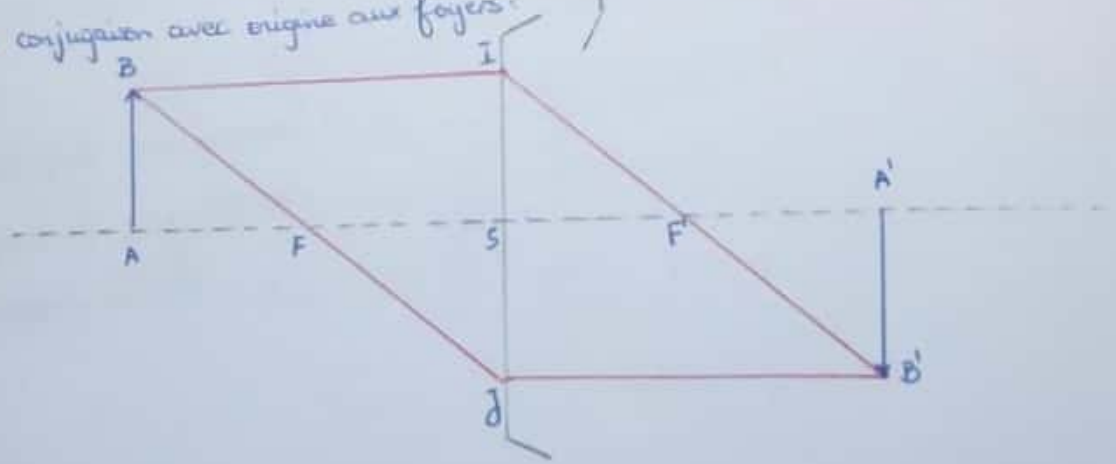
- Construction de l'image d'un point sur l'axe optique :




- Construction de l'image d'un objet étendu :




- Relation de conjugaison avec origine aux foyers :




Scanné avec CamScanner

- Les triangles ABF et FJS sont semblables, on peut écrire alors :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SJ}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FS}} \quad \text{avec } \overline{AB} = \overline{SI}$$



- Les triangles ISF' et F'B'A' sont semblables : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{FS}}$ avec $\overline{A'B'} = \overline{SJ}$
- Le grandissement transversal est par définition : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
- Les triangles CAB et CA'B' sont semblables : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \Rightarrow G_t = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$
- Selon l'invariant de Möbius on a : $\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{n}{n'} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

→ **le grandissement transversal s'écrit :** $G_t = \frac{n}{n'} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

- D'après la relation de Lagrange - Helmholtz on a :

$$n\,\overline{AB}\,u = n'\,\overline{A'B'}\,u' \Rightarrow G_u = \frac{u'}{u} = \frac{n}{n'} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow G_u = \frac{n}{n'} \frac{1}{G_t} \Rightarrow G_u = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$$

- Le grandissement axial est défini par :

$$G_l = \lim_{A \to A_1} \frac{\overline{A'A'_1}}{\overline{AA_1}}$$

- En considérant des origines quelconques O et O' :

$$G_l = \lim_{A \to A_1} \frac{\overline{OA'_1} - \overline{OA'}}{\overline{OA_1} - \overline{OA}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{dx'}{dx}$$

- Grandissement axial avec origine au sommet :

$$G_l = \frac{n}{n'} \left( \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \right)^2$$

- Grandissement axial avec origine au centre : $G_l = \frac{n}{n'} \left( \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \right)^2$
- Grandissement axial avec origines aux foyers : $G_l = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{FA}}$

**Dioptre plan dans l'approximation de Gauss :**

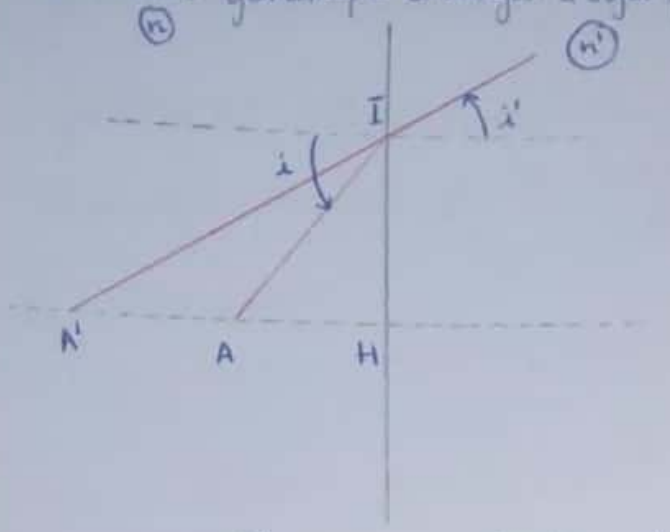
- Le dioptre plan est un cas particulier du dioptre sphérique pour lequel on fait tendre le rayon de courbure SC à l'∞. C'est un système optique afocal, ses foyers objet et image sont rejetés à l'∞.
- **relation de conjugaison avec origine au sommet**, on l'établi à partir de celle du dioptre sphérique en faisant tendre le rayon de courbure à l'∞

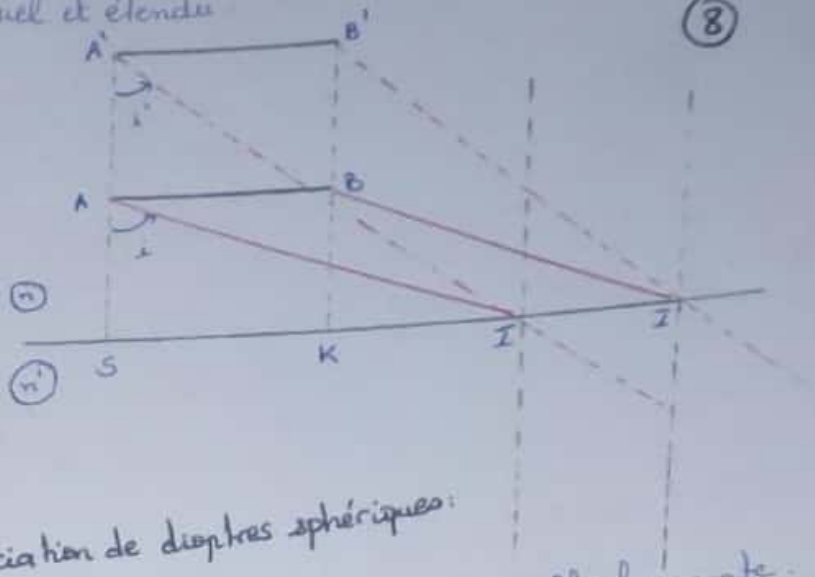
$$\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{SC_\infty}} = 0 \Rightarrow \overline{SA'} = \frac{n'}{n}\,\overline{SA}$$

- **grandissement transversal :** $G_t = \frac{n}{n'} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow G_t = 1$
- **grandissement angulaire :** $G_u = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} \Rightarrow G_u = \frac{n}{n'}$
- **grandissement axiale :** $G_l = \frac{n}{n'} \left( \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \right)^2 \Rightarrow G_l = \frac{n'}{n}$

Scanné avec CamScanner

- Construction géométrique d'images d'objet ponctuel et étendu



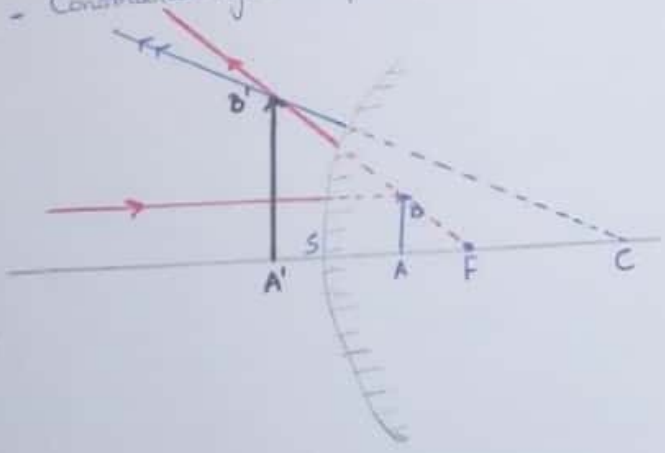

# Miroir dans l'approximation de Gauss et association de dioptres sphériques:

## I- Miroir sphérique :

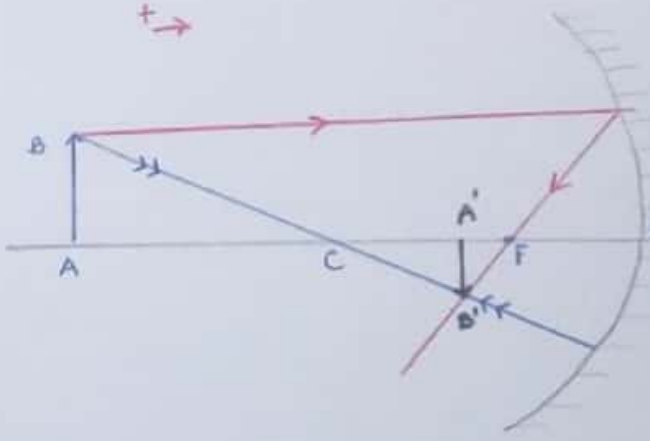
- Le miroir sphérique est une interface de forme sphérique totalement réfléchissante. Il sera dit convexe si son centre est du côté où la lumière ne se propage pas et il est dit concave dans le cas contraire.
- Pour établir les relations de conjugaison du miroir sphérique on reprend celles du dioptre sphérique en considérant ~~n'=n~~ $n' = -n$

| origine au sommet | origine au centre | origine aux foyers |
|---|---|---|
| $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC} = V$ | $\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{2}{CS}$ | $\overline{FA'} \cdot \overline{FA} = \overline{FS}^2$ |

- Les foyers objet et image sont confondus dans le cas du miroir sphérique
- Ces foyers sont obtenus en prenant un objet / image situé à l'infini sur l'axe principal du miroir : $f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{V} = -\frac{n}{V} = \overline{SF} = f$
- Construction géométrique pour le miroir sphérique :




miroir convexe




miroir concave

Scanné avec CamScanner

- grandissement transversal : $G_t = \frac{n}{n'} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow G_t = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

- grandissement angulaire : $G_t G_a = \frac{n}{n'} = -1 \Rightarrow G_a = \frac{-1}{G_t} \Rightarrow G_a = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$



- grandissement longitudinal : $G_l = -\left(\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}\right)^2$

## II - Miroir plan :

- C'est un cas particulier du miroir sphérique. On tend le rayon de courbure à l'infini pour établir les relations de conjugaison : $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = 0 \Rightarrow \overline{SA'} = -\overline{SA}$.
- Les grandissements : $G_t = 1$ ; $G_a = -1$ ; $G_l = -1$

## III - Lentille épaisse :

- C'est un système optique composé de trois milieux homogènes, isotropes et d'indices optiques différents, séparés par des interfaces dont l'un au moins a une forme géométrique sphérique.

Scanné avec CamScanner